66. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Najděte všechna řešení rovnice

$$1 = \frac{|3x-7| - |9-2x|}{|x+2|}.$$

2. Označme M množinu všech hodnot výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$, kde n je liché přirozené číslo. Najděte všechny možné zbytky při dělení číslem 48, které dávají prvky množiny M.

3. Pata P výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC dělí stranu AB v poměru $|AP| : |PB| = 1 : 3$. Ve stejném poměru jsou i obsahy čtverců nad jeho stranami AC a BC. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 31. ledna 2017

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

66. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Ze zadání plyne, že $x \neq -2$. Po vynásobení výrazem $|x+2|$ dostáváme rovnici $|x+2| = |3x-7| - |9-2x|$, kterou nyní vyřešíme.

Nulové body tří absolutních hodnot s neznámou nám rozdělují reálnou osu na čtyři intervaly, v nichž má každý z odpovídajících dvojčlenů stále stejné znaménko, zatímco v krajních bodech je nulový. V každém z těchto intervalů už tedy můžeme řešit odpovídající rovnici bez absolutních hodnot.

- ▷ $x \in (-\infty, -2)$: dostáváme rovnici $-x-2 = -3x+7-(9-2x)$, která po úpravě přejde v identitu $0=0$. Všechna čísla ze zkoumaného intervalu původní rovnici vyhovují.
- ▷ $x \in \langle -2, \frac{7}{3})$: dostáváme rovnici $x+2 = -3x+7-(9-2x)$ neboli $2x=-4$ s jediným řešením $x=-2$, které jak už víme, původní rovnici nevyhovuje.
- ▷ $x \in \langle \frac{7}{3}, \frac{9}{2})$: dostáváme rovnici $x+2 = 3x-7-(9-2x)$ s řešením $x = \frac{9}{2}$, jež však v uvažovaném intervalu neleží.
- ▷ $x \in \langle \frac{9}{2}, \infty)$: dostáváme rovnici $x+2 = 3x-7-(-9+2x)$, která po úpravě přejde v identitu $0=0$. Vyhovují všechna x z tohoto intervalu.

Závěr. Všechna řešení úlohy tvoří množinu $(-\infty, -2) \cup \langle \frac{9}{2}, \infty)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správný postup (snahu o odstraňování absolutních hodnot) udělte 1 bod. Za vyšetření rovnice v každém z intervalů 1 bod. Závěr (explicitní uvedení množiny řešení) 1 bod. Za každý špatně spočítaný nulový bod strhněte 2 body (maximálně však 5 bodů). S rovnicí lze pracovat i v původním tvaru s neodstraněným zlomkem.

2. Nejprve vypočteme příslušné hodnoty výrazu V pro několik prvních lichých čísel:

n	$V(n)$
1	0
3	$168 = 3 \cdot 48 + 24$
5	$888 = 18 \cdot 48 + 24$
7	$2\,928 = 61 \cdot 48$
9	$7\,440 = 155 \cdot 48$

Mezi hledané zbytky tedy patří čísla 0 a 24. Ukážeme, že jiné zbytky už možné nejsou. K tomu stačí dokázat, že pro každé liché číslo n platí $24 \mid V(n)$. Z domácího kola víme, že pro každé přirozené číslo n platí $12 \mid V(n)$, tedy i $3 \mid V(n)$. Protože čísla 3 a 8 jsou nesoudělná, stačí ukázat, že pro každé liché číslo n platí $8 \mid V(n)$. Využijeme přitom rozkladu daného výrazu na součin

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2-1)(n^2+12) = (n-1)(n+1)(n^2+12). \qquad (1)$$

Libovolné liché přirozené číslo n lze zapsat ve tvaru $n = 2k-1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Pro takové n pak dostáváme

$$V(2k-1) = [(2k-1)-1][(2k-1)+1][(2k-1)^2+12] = 4(k-1)k(4k^2-4k+13),$$

a protože součin $(k-1)k$ dvou po sobě jdoucích celých čísel je dělitelný dvěma, je celý výraz dělitelný osmi.

Závěr. Daný výraz může dávat při dělení číslem 48 právě jen zbytky 0 a 24.

Poznámka. Poznatek, že $8 \mid V(n)$ pro každé liché n, lze dokázat i jinak, bez užití rozkladu (1). Je-li totiž $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, pak číslo

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$$

dává při dělení osmi (díky tomu, že jedno z čísel k, $k-1$ je sudé) zbytek 1, a tedy stejný zbytek dává i číslo n^4 (jakožto druhá mocnina lichého čísla n^2). Platí tedy $n^2 = 8u + 1$ a $n^4 = 8v + 1$ pro vhodná celá u a v, takže hodnota výrazu

$$V(2k-1) = (8v+1) + 11(8u+1) - 12 = 8(v + 11u)$$

je skutečně násobkem osmi.

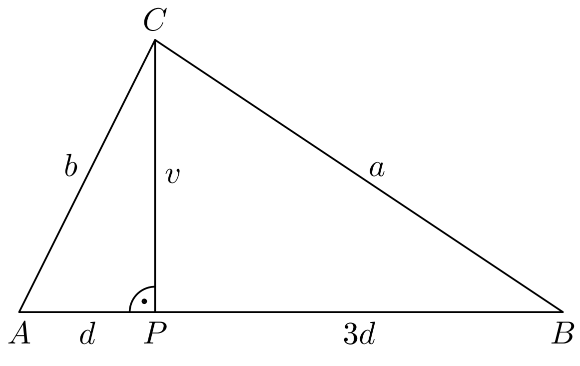
Připojme i podobný důkaz poznatku $3 \mid V(n)$ z domácího kola. Pro čísla n dělitelná třemi je to zřejmé, ostatní n jsou tvaru $n = 3k \pm 1$, takže číslo

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3k(3k \pm 2) + 1$$

dává při dělení třemi zbytek 1, stejně tak i číslo $n^4 = (n^2)^2$. Dosazení $n^2 = 3u + 1$ a $n^4 = 3v + 1$ do výrazu $V(n)$ už přímo vede k závěru, že $3 \mid V(n)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za využití faktu z domácího kola ($12 \mid V(n)$ pro libovolné n) k odvození (konstatování) toho, že zbytky mohou být pouze 0, 12, 24 a 36, udělte 1 bod. Za snahu dokázat, že $8 \mid V(n)$ pro n lichá, udělte 1 bod, za důkaz tohoto tvrzení udělte 2 body. Za závěr, že z $3 \mid V(n)$ a $8 \mid V(n)$ plyne $24 \mid V(n)$, udělte 1 bod (nesoudělnost čísel 3 a 8 musí být zmíněna; závěr typu „z $12 \mid V(n)$ a $8 \mid V(n)$ zřejmě plyne, že $24 \mid V(n)$“ nestačí, není-li např. dodáno, že 24 je nejmenší společný násobek čísel 8 a 12). Za ověření, že zbytky 0 a 24 jsou skutečně možné, udělte 1 bod (stačí uvést např. jen hodnoty $V(1)$ a $V(3)$).

3. Označme d délku úsečky AP a v délku výšky CP trojúhelníku ABC. Délky jeho stran označíme obvyklým způsobem a, b, c. Ze zadání tedy plyne $|PB| = 3d$ (obr. 1).



Obr. 1

Použitím Pythagorovy věty v trojúhelnících APC a PBC dostáváme rovnosti $b^2 = d^2 + v^2$ a $a^2 = 9d^2 + v^2$. Z druhého předpokladu úlohy pak plyne rovnost $a^2 = 3b^2$ neboli $9d^2 + v^2 = 3d^2 + 3v^2$, odkud $v^2 = 3d^2$. Dosazením do prvních dvou rovností tak dostáváme $a^2 = 12d^2$ a $b^2 = 4d^2$. A protože $c = 4d$ neboli $c^2 = 16d^2$, dokázali jsme, že pro délky stran trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Trojúhelník ABC je proto podle obrácené Pythagorovy věty pravoúhlý.

Poznámka. Uvážíme-li pomocný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a a b, pak pro jeho přeponu c' podle Pythagorovy věty platí $c'^2 = a^2 + b^2$. Porovnáním s odvozenou rovností $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme $c' = c$, takže původní trojúhelník je podle věty sss shodný s trojúhelníkem pomocným, a je tudíž vskutku pravoúhlý. Lze tolerovat názor, že sama Pythagorova věta udává nejen nutnou, ale i postačující podmínku k tomu, aby byl daný trojúhelník pravoúhlý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za napsání Pythagorovy věty v obou trojúhelnících APC a PBC dejte jeden bod. Za odvození vztahu $v^2 = 3d^2$ udělte 2 body, za jeho důsledek $a^2 + b^2 = c^2$ pak další 1 bod. Za učinění závěru, že potom je trojúhelník pravoúhlý, pak udělte dva body. Za různé manipulace s rovnicemi bez dosažení vztahu vedoucího ke správnému důkazu body neudělujte.